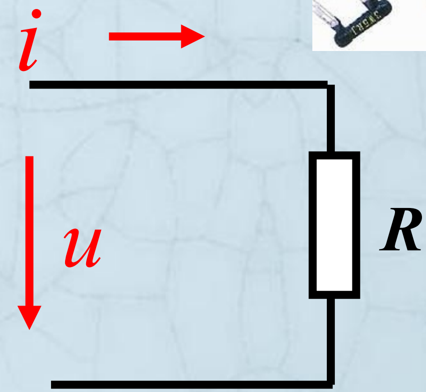
16. 纯 R 、 L 、 C 电路 （单一参数正弦交流电路的分析）分析

纯电阻电路

1. 电阻元件 $u = Ri$



2. 正弦交流电路中的电阻元件

（1）电压与电流关系

设： $i = I_m \sin \omega t$

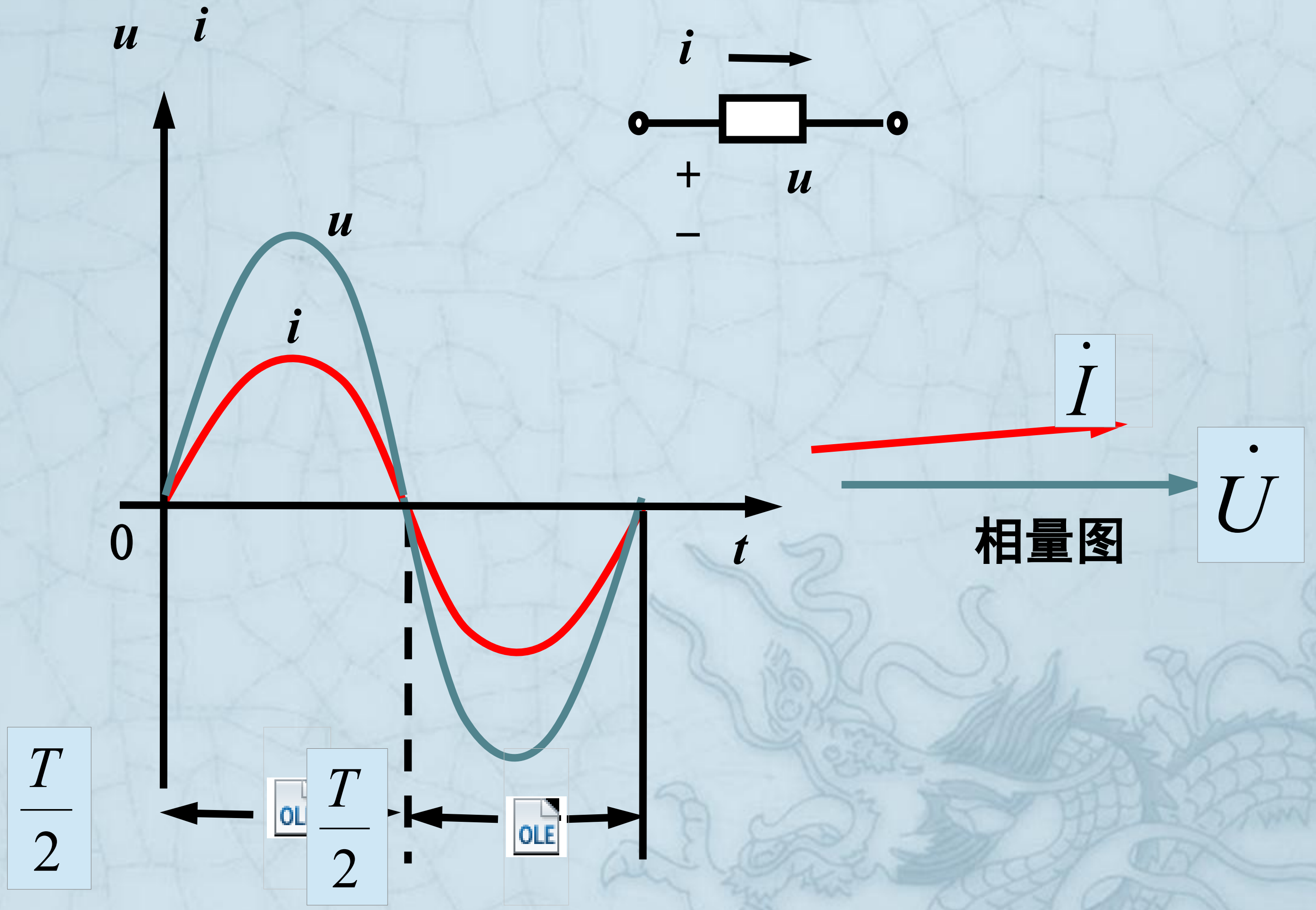
则 $u = Ri = RI_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t$ $U_m = RI_m$

比较 *u* 、 *i* ：频率相同、相位相同、有效值关系 $U=RI$

- 得相量关系 $\dot{U} = R\dot{I}$

电流和电压的瞬时值、最大值、有效值都服从欧姆定律。

纯电阻电路

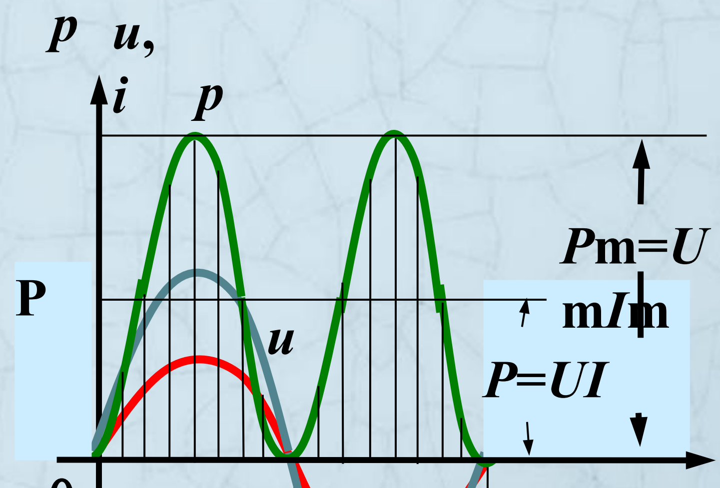


电阻元件的关联参考方向、波形图和相量图

纯电阻电路的功率

- 瞬时功率

$$
\begin{aligned}
p &= ui \\
&= U_m \sin \omega t I_m \sin \omega t \\
&= U_m I_m \sin^2 \omega t \\
&= UI(1 - \cos 2\omega t)
\end{aligned}
$$



- **结论：1. p 随时间变化；** 2. $p \geq 0$，为耗能元件。

$\frac{T}{2}$ $\frac{T}{2}$

瞬时功率在一个周期内的平均值，称为平均功率，即

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\ dt = \frac{1}{T}\int_0^T (UI - UI\cos 2\omega t)dt = UI$$

平均功率计算式

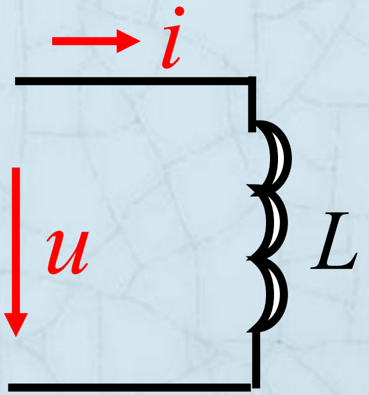
$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

纯电感电路

（1）电压、电流关系

设： $i = I_m \sin \omega t$

则 $$u = L\frac{di}{dt} = L\frac{d(I_\mathrm{m} \sin \omega t)}{dt}$$
$$= LI_\mathrm{m}\omega \cos \omega t$$
$$= I_\mathrm{m}L\omega \sin(\omega t + 90\ )$$
$$= U_\mathrm{m} \sin(\omega t + 90\ )$$



令 $U_\mathrm{m} = I_\mathrm{m}\omega L$

比较 *u*、 *i*：频率相同、相位差、 $\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i = 90$

有效值关系 $U = \omega L I$

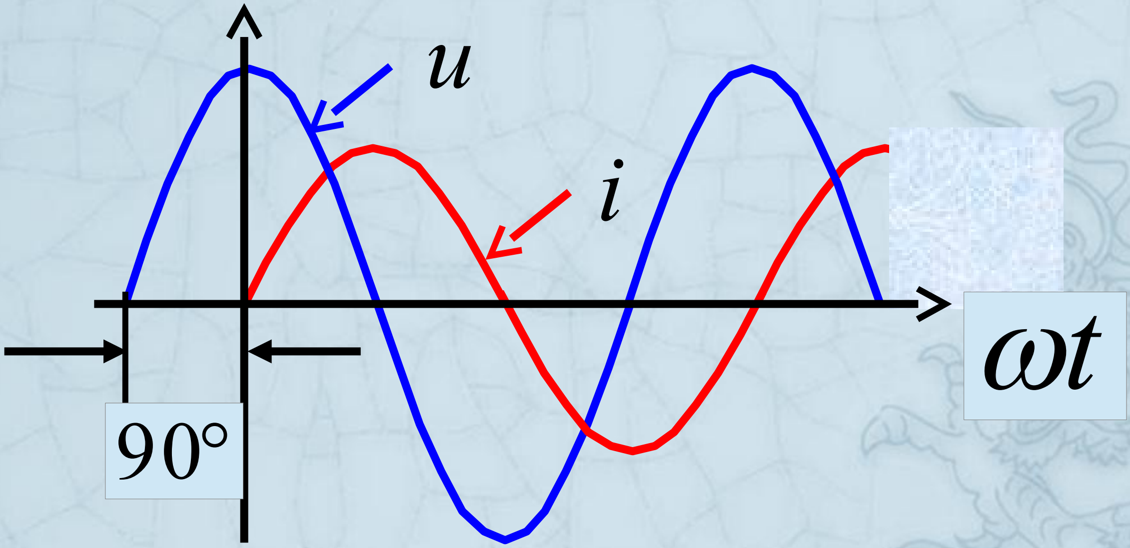
- 得相量关系 $\dot{U} = j\omega L\dot{I} = jX_L\dot{I}$

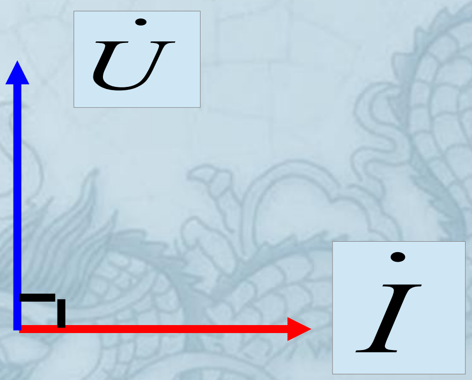
纯电感电路

电感电路中电流、电压的关系

$$i = I_{\mathrm{m}} \sin \omega t$$

$$u = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + 90^{\circ})$$





纯电感电路

由 $U = \omega LI$

$X_L=\omega L=2\pi f L$ 称为电感元件感抗。

感抗反映了电感元件对正弦交流电流的阻碍作用；

感抗的单位与电阻相同，也是欧姆（Ω）。

感抗 X_L 的单位为欧姆（Ω）。X_L 与 ω 成正比，频率愈高，X_L 愈大，在一定电压下，I 愈小。

在直流情况下，$\omega = 0$，$X_L=0$，电感相当于短路；

在交流电路中电感元件具有通低频阻高频的特性。

纯电感电路的功率

- 瞬时功率

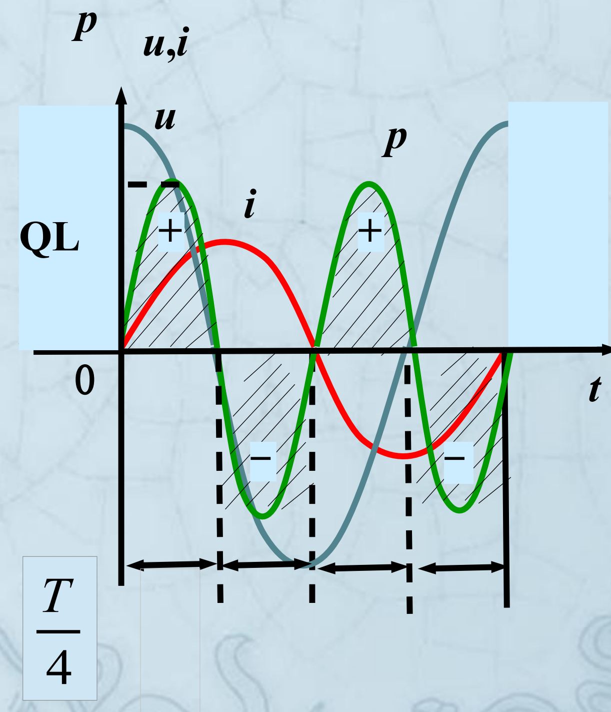
$p = u$ � $U_m I_m \sin\omega t \cos\omega t$

$= UI\sin 2\omega t$

$\frac{T}{4}$ $\frac{T}{4}$ $\frac{T}{4}$

- 平均功率或有功功率 P=0

- 无功功率 QL



用无功功率 QL 衡量电感元件与外界交换能量的规模，即

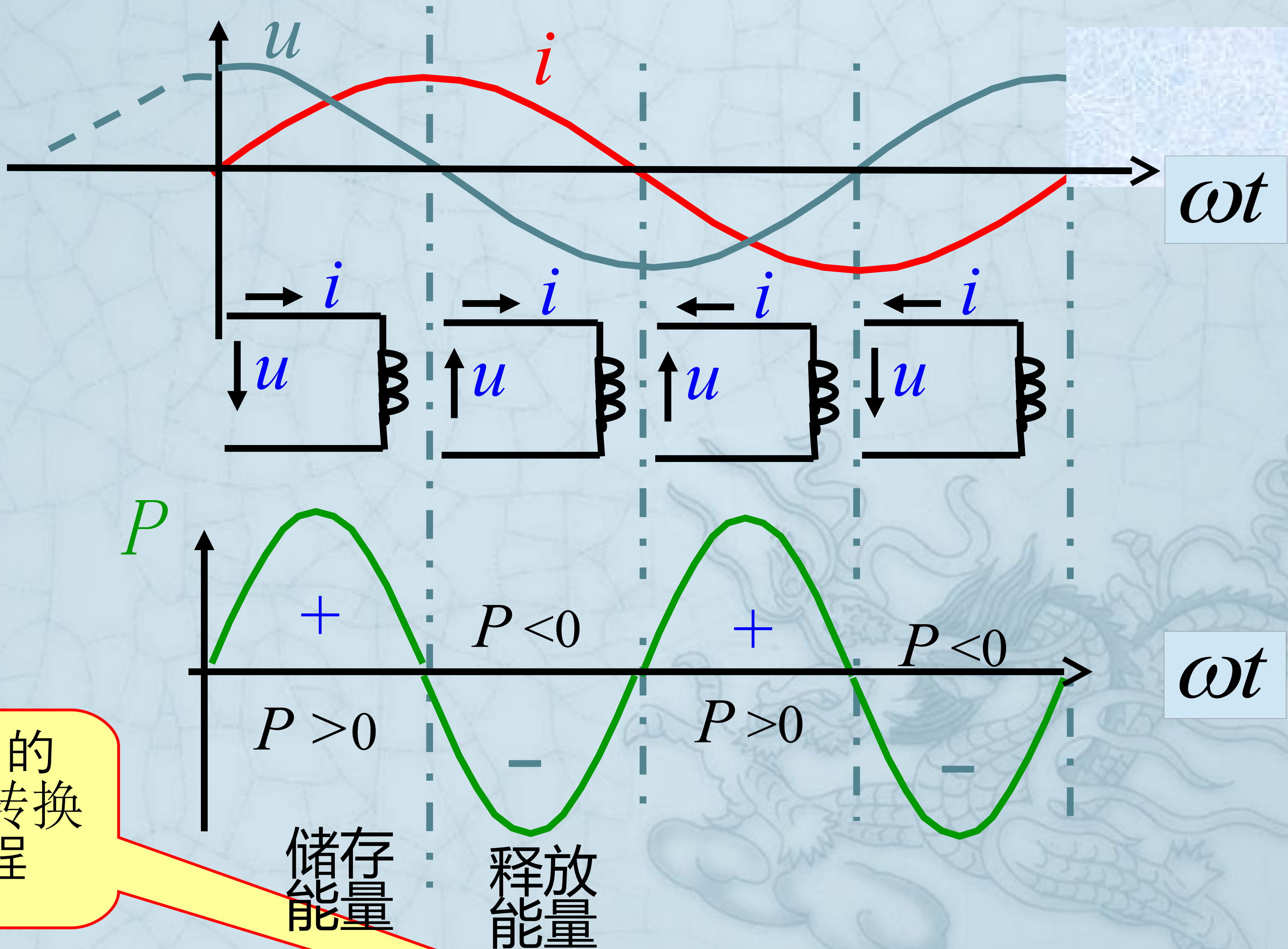
无功功率计算式 $Q_L = UI = I^2 X_L = \frac{U^2}{X_L}$

无功功率单位
乏（Var）

纯电感电路

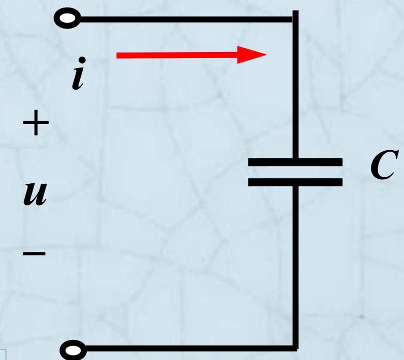
交换能量过程分析

$$p = ui = UI\sin 2\omega t$$



可逆的能量转换过程

纯电容电路



（1）电压、电流关系

设： $u = U_m \sin \omega t$

则： $$i = C\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} C U_m \sin \omega t$$
$$= \omega C U_m \cos \omega t$$
$$= I_m \sin(\omega t + 90\ )$$

令： $I_m = \omega C U_m$

比较 ***u*** 、 *i* ：频率相同、相位差 $\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i = -90$

有效值关系 $I = \omega C U$

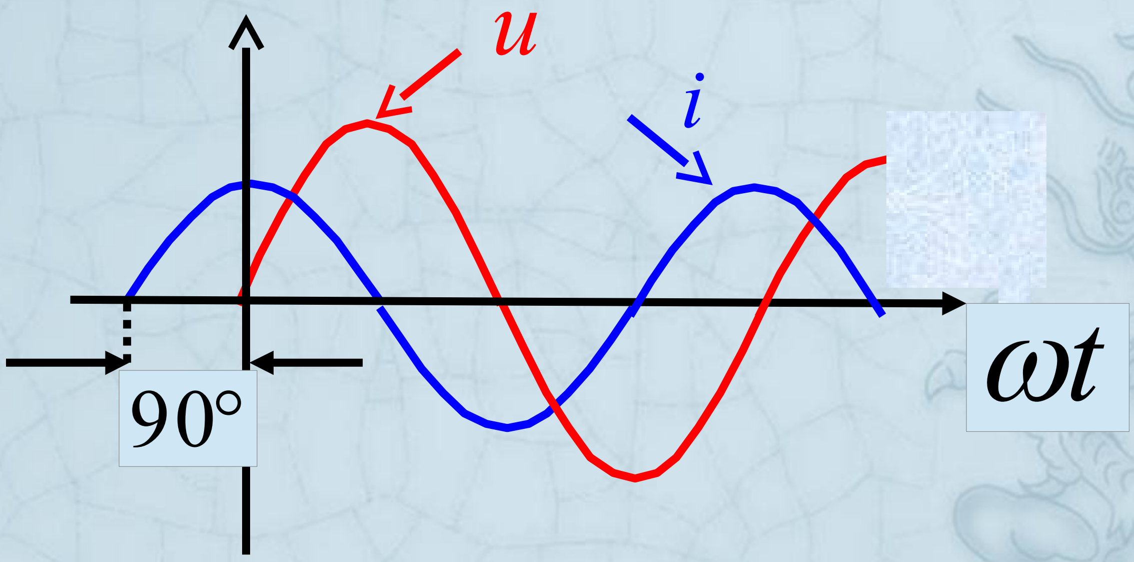
- 得相量关系 $\dot{I} = j\omega C\dot{U}$ 或 $\dot{U} = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I} = -jX_C\dot{I}$

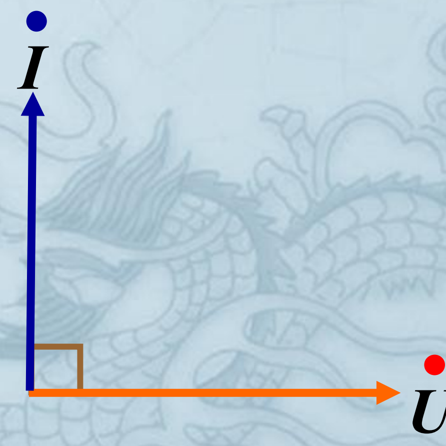
纯电容电路

电容电路中电流、电压的关系

$$u_c = U_m \sin \omega t$$

$$i = I_m \sin(\omega t + 90\ )$$





纯电容电路

$$I = \omega CU = 2\pi fCU = \frac{U}{X_C}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC}$$

XC 称为电容元件的电抗，简称容抗。
容抗反映了电容元件对正弦交流电流的阻碍作用；
容抗的单位与电阻相同，也是欧姆（ Ω ）。

容抗 *X*L 的单位为欧姆（ Ω ）。*X*C 与 ω 成反比，频率愈高， *X*C 愈小，在一定电压下， *I* 愈大。

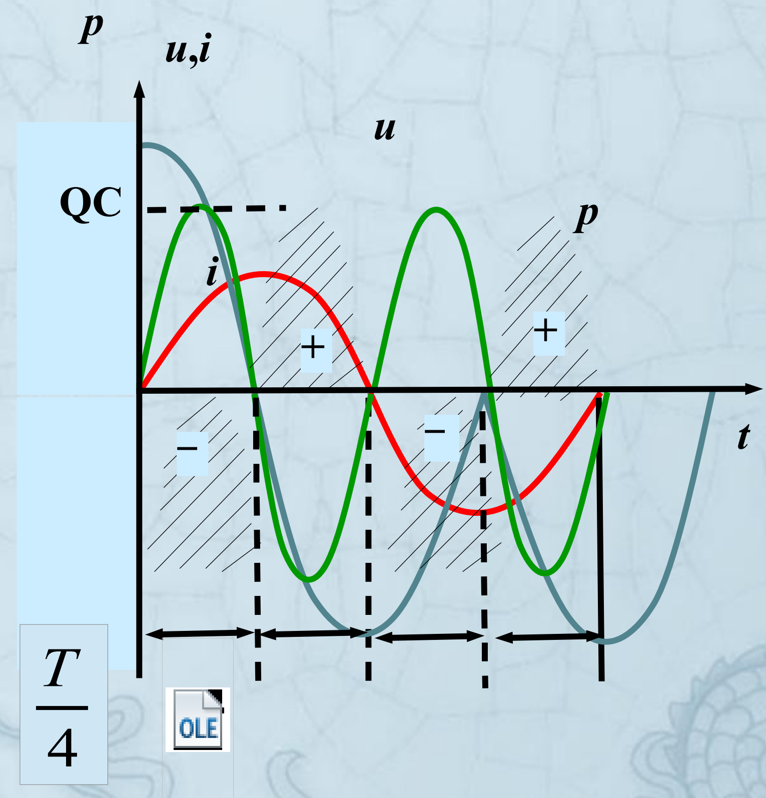
在直流情况下， $\omega = 0$， *X*C=∞ ， 电容相当于开路；

在交流电路中电容元件具有隔直通交和通高频阻低频的特性。

纯电容电路的功率

- 瞬时功率

$$p = u\ \ i$$
$$= U_m I_m \sin\omega t \cos\omega t$$
$$= U\ \frac{T}{4}\ \mathrm{s}\frac{T}{4}\ 2\ \frac{T}{4}$$



- 平均功率或有功功率 P=0

- 无功功率 QC

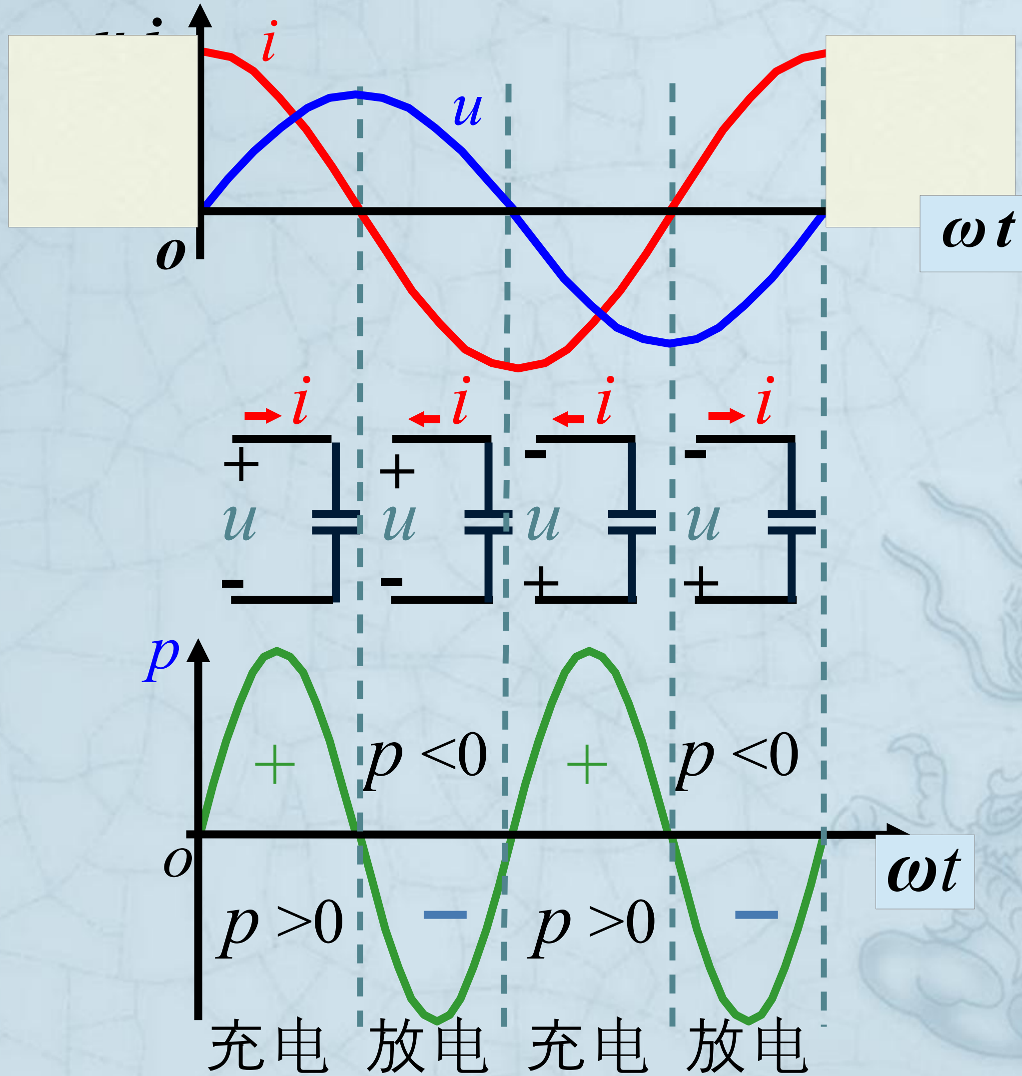
用无功功率 QC 衡量电容元件与外界交换能量的规模，即

无功功率计算式 $$Q_C = UI = I^2 X_C = \frac{U^2}{X_C}$$

无功功率单位乏（Var）

纯电容电路

瞬时功率 $p = i \cdot u = UI \sin 2\omega t$



结论：

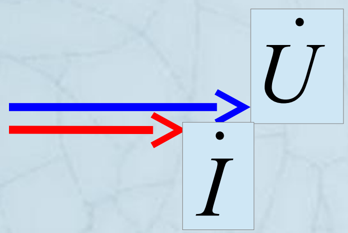
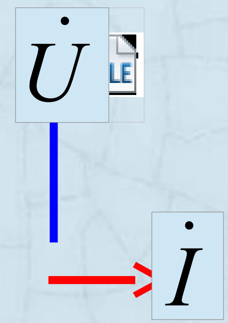
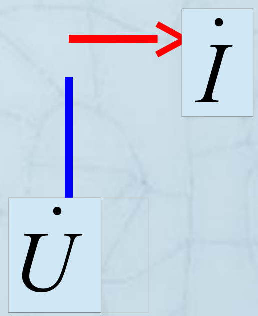
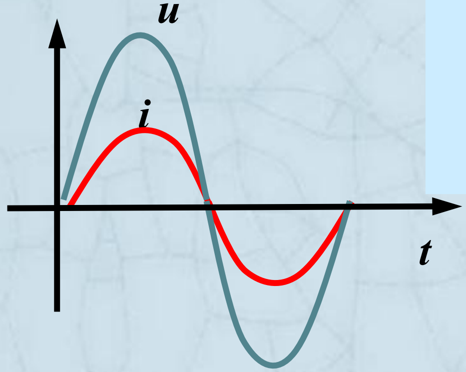
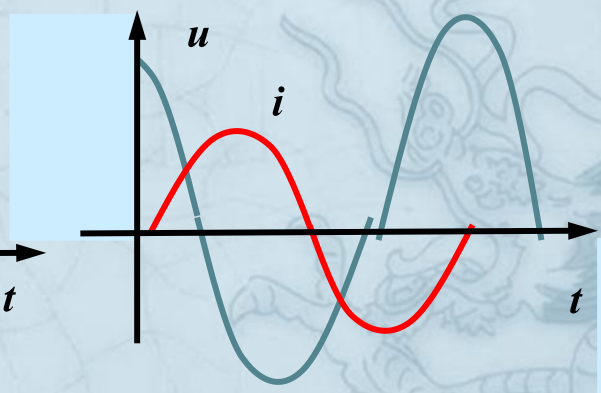
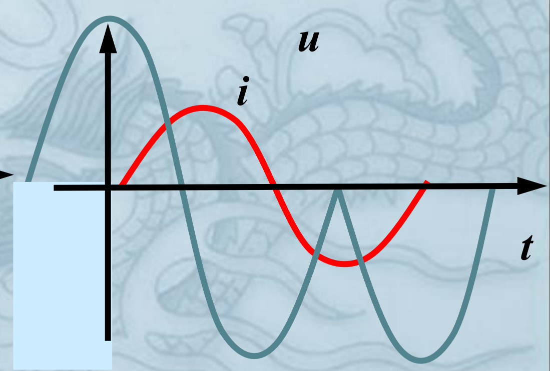
纯电容不消耗能量，只和电源进行能量交换（能量的吞吐）。

所以电容 C 是储能元件。

单一元件的电压电流关系

元件	R	L	C
瞬时值关系	$u = R \cdot i$	$u = L\dfrac{di}{dt}$	$i = C\dfrac{du}{dt}$
有效值关系	$U=RI$	$U=\omega LI$	$U = \dfrac{1}{\omega C}I$
相量关系	$\dot{U} = R\dot{I}$	$\dot{U} = j\omega L\dot{I}$	$\dot{U} = -j\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}$

单一元件电压电流的波形图和相量图

	R	L	C
相量图			
波形图			
	u 、 i 同相	u 超前 i 90°	i 超前 u 90°

单一元件的功率

元件	瞬时功率	平均功率或有功功率	无功功率
R	$p = ui = UI - UI\cos 2\omega t$	$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$	
L	$p = ui = UI\sin 2\omega t$		$Q_L = UI = I^2 X_L = \frac{U^2}{X_L}$
C	$p = ui = -UI\sin 2\omega t$		$Q_C = -UI = -I^2 X_C = -\frac{U^2}{X_C}$