



广东工程职业技术学院

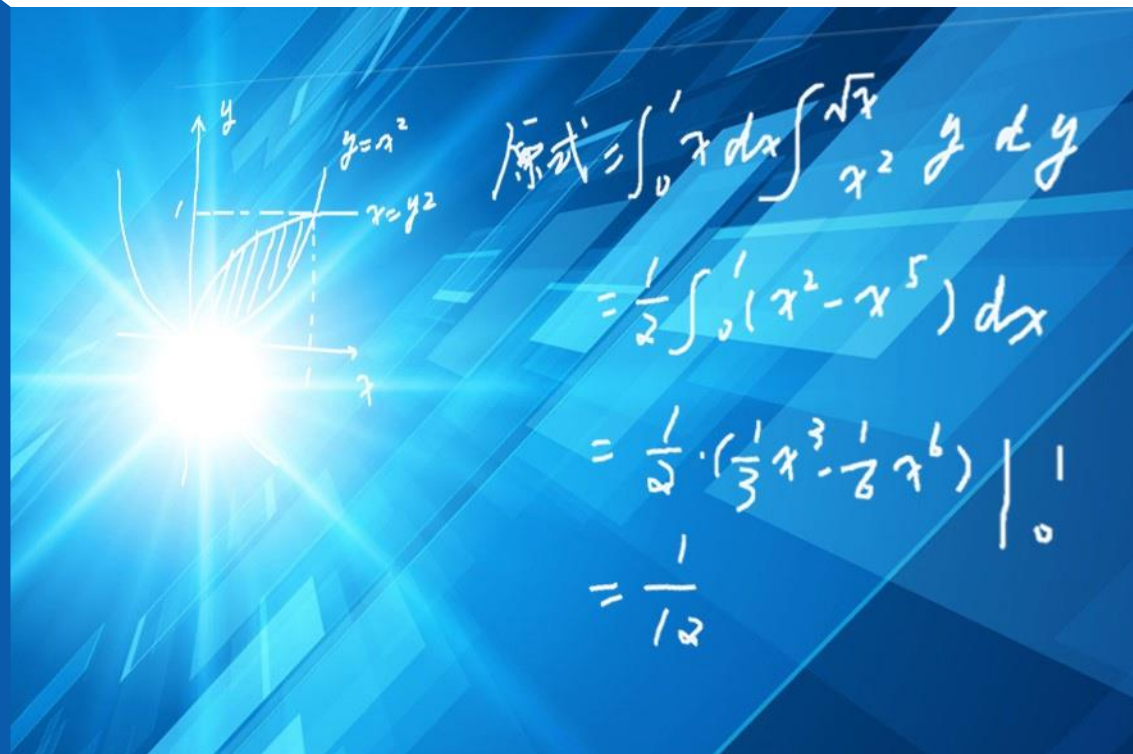
GUANGDONG ENGINEERING POLYTECHNIC

经济数学

课程类型：专业基础课

授课对象：高职一年级学生

授课教师：张秀娟





广东工程职业技术学院

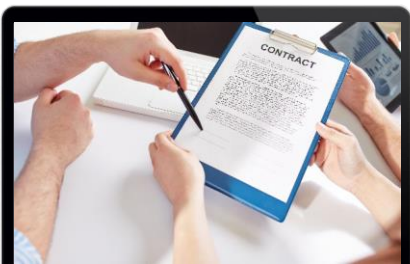
GUANGDONG ENGINEERING POLYTECHNIC

《经济数学》——公司经济事项分析

——项目2.2 生产和经营状况分析——

训练任务

边际成本的描述



1. 某产品的总成本 C 是产量 q 的函数 $C = C(q)$, 总成本 C 随产量 q 变化的瞬时变化率, 在经济学中称为**边际成本**, 记为 MC , 则如何用数学语言描述边际成本 MC .



2. 某产品的总收益 R 是销量 q 的函数 $R = R(q)$. 总收益 R 随销量 q 变化的瞬时变化率, 在经济学中称为**边际收益**, 记为 MR , 则如何用数学语言描述边际收益 MR .



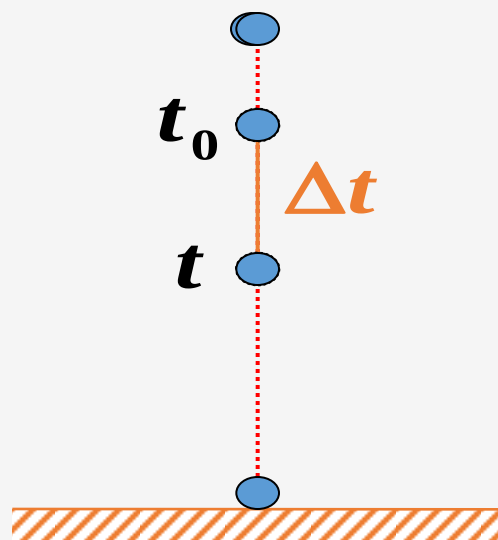
3. 某产品的利润 L 是产销量 q 的函数 $L = L(q)$. 利润 L 随产销量 q 变化的瞬时变化率, 在经济学中称为**边际利润**, 记为 ML , 则如何用数学语言描述边际利润 ML .

- 导数的概念
- 导数的几何意义、物理意义和经济意义
- 基本求导公式

一、导数概念的引入实例

1. 变速直线运动的瞬时速度 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$

——以自由落体运动的瞬时速度问题为例



求 $t = 5$ 秒时刻的瞬时速度.



一、导数概念的引入实例

(1)先求5s变化到5 + 0.01s时刻的平均速度

$$\text{平均速度 } \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g \times (5 + 0.01)^2 - \frac{1}{2}g \times 5^2}{(5 + 0.01) - 5} = 50.05m / s$$

(2)求5s变化到5 + Δts时刻的平均速度

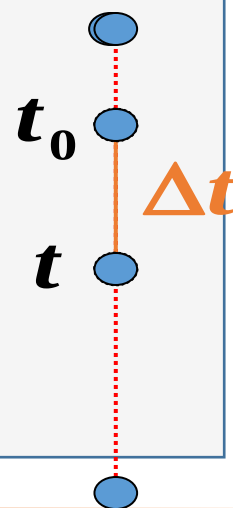
$$\text{平均速度 } \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g \times (5 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}g \times 5^2}{(5 + \Delta t) - 5} = 5(10 + \Delta t)m / s$$

(3)当 $t \rightarrow t_0$ 时,即 $\Delta t \rightarrow 0$ 时就是当时间为 t_0 时的瞬时速度 取极限得

第5秒时的瞬时速度

$$v|_{t=5} = \left. \frac{\Delta s}{\Delta t} \right|_{t=5} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}g \times (5 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}g \times 5^2}{(5 + \Delta t) - 5} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 5(10 + \Delta t) = 50m / s$$

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$



一、导数概念的引入实例

1. 变速直线运动的瞬时速度

已知变速直线运动的路程函数 $s = s(t)$ ，当时间从 t_0 变到 $t_0 + \Delta t$ 时，物体的平均速度是

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} .$$

$|\Delta t|$ 无限小时，平均速度无限接近于 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$ ，即

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} .$$



一、导数概念的引入实例

2. 总产量的变化率

设某化工产品在时间段 $[0, t]$ 内的总产量 Q （吨）是时间 t （小时）的函数 $Q = Q(t) = t^2$ ，试求该产品生产到第 5 小时时的总产量变化率（简称生产率，即第 5 小时时总产量是多少吨/小时）？

(1) 求5小时变化到 $5 + \Delta t$ 小时产量的平均变化率

$$\text{平均变化率 } \bar{Q} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{(5 + \Delta t)^2 - 5^2}{\Delta t} = 10 + \Delta t$$

(2) 当 $t \rightarrow t_0$ 时, 即 $\Delta t \rightarrow 0$ 时 取极限得

$$\text{第5小时的生产率} = \left. \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right|_{t=5} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(5 + \Delta t)^2 - 5^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (10 + \Delta t) = 10 \text{ 吨 / 小时}$$



一、导数概念的引入实例

2. 总产量的变化率

设某产品在时间段 $[0, t]$ 内的总产量 Q 是时间 t 的函数 $Q = Q(t)$ ，当时间由 t_0 变到 $t_0 + \Delta t$ 时，平均产量（即平均变化率）是

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)}{\Delta t}.$$

当 $|\Delta t|$ 越来越小时， $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ 越来越接近 t_0 时刻的总产量变化率，如果极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)}{\Delta t}$$

存在，则称此极限是 t_0 时刻的总产量的变化率，又称生产率。



一、导数概念的引入实例

3. 曲线的切线斜率

设曲线方程为 $y = x^2$ ，试求该曲线在 $x = 5$ 处的切线斜率.

(1) 求 x 由 5 变化到 $5 + \Delta x$ 时曲线割线的斜率

$$k_{\text{割线}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(5 + \Delta x)^2 - 5^2}{\Delta x} = 10 + \Delta x$$

(2) 当 $5 + \Delta x \rightarrow 5$ 时, 即 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 取极限得

$$k|_{x=5} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (10 + \Delta x) = 10$$



一、导数概念的引入实例

3. 曲线的切线斜率

如图，割线 M_0M 的斜率是

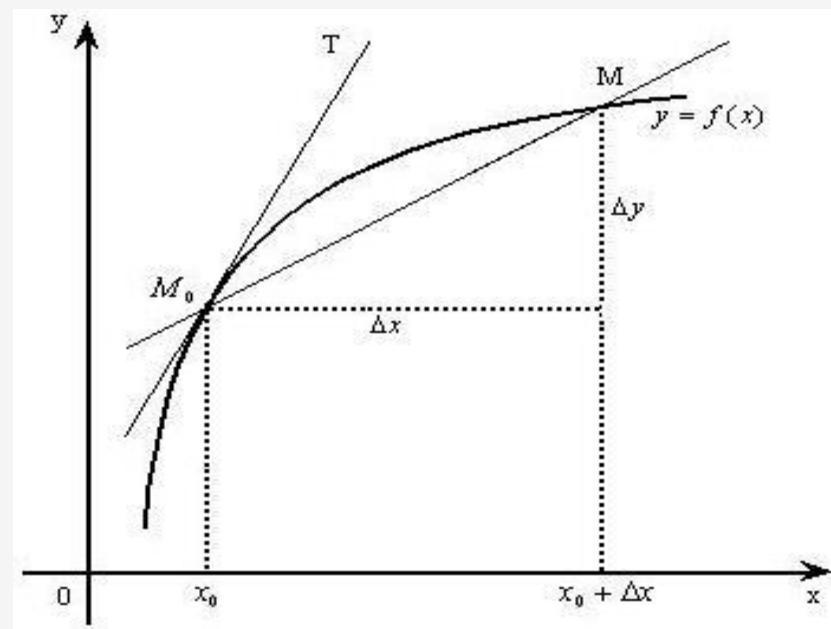
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果 $\Delta x \rightarrow 0$ 时割线 M_0M 斜率的极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则此极限就是曲线

$y = f(x)$ 在 M_0 点的切线斜率.



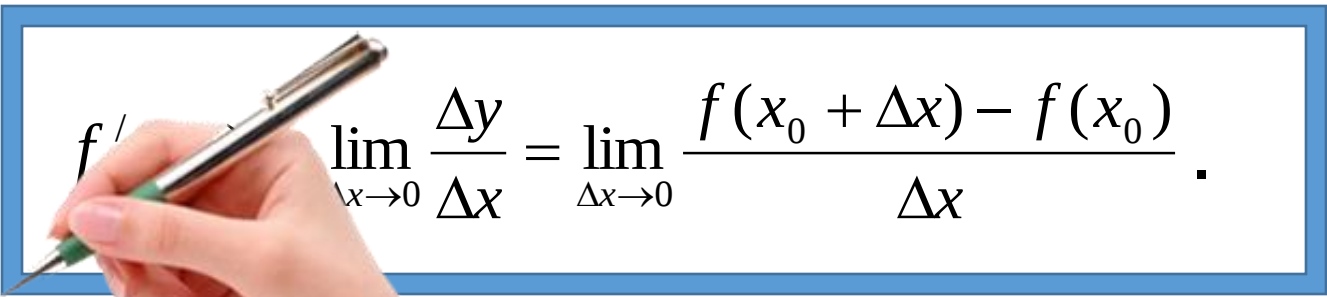
导数的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 及其左右近旁有定义，若极限

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限

值为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**（或变化率），记为 $f'(x_0)$ ， $y'|_{x=x_0}$ ， $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 或

$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ ，即

A hand holding a pen is shown writing the derivative formula inside a blue-bordered box.
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

若极限不存在，则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不可导。



导函数的定义

若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都可导，则称函数在区间 (a, b) 内可导. 这时对任意给定的值 $x \in (a, b)$ ，都有一个确定的导数值与之对应，从而确定了一个新的函数，称此函数为函数 $y = f(x)$ 的**导函数**（简称**导数**），记为

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx} \text{ 或 } \frac{df(x)}{dx},$$

即

A hand holding a pen is shown writing the derivative formula inside a blue rectangular box.
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

显然，函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数值等于导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的函数值，

即

$$f'(x_0) = f'(x) \Big|_{x=x_0}.$$



导函数的定义

显然 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数值等于导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的函数值

$$f'(x_0) = f'(x) \Big|_{x=x_0} .$$

动画演示



由导数的定义可知

(1) 变速直线运动的物体在 t_0 时刻的速度, 就是路程函数 $s = s(t)$ 在 t_0 处对时间 t 的导数, 即

$$v(t_0) = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0} = s'(t_0).$$

(2) 某产品在 t_0 时刻的总产量的变化率, 就是该产品的总产量函数 $Q = Q(t)$ 在 t_0 处对时间 t 的导数, 即

$$\left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=t_0} = Q'(t_0).$$

(3) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率是函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点处的导数, 即

$$k = f'(x_0).$$



用导数表示经济量举例

生产某产品的总成本函数 $C = C(q)$ 对产量为 q 的变化率

$$MC = \frac{dC}{dq} = C'(q) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{C(q + \Delta q) - C(q)}{\Delta q}$$

称为产量为 q 时的**边际成本**，表示在产量为 q 单位时，每增加（或减少）单位产品所需增加（或减少）的成本。

销售某商品的总收入函数 $R = R(q)$ 对销量 q 的变化率

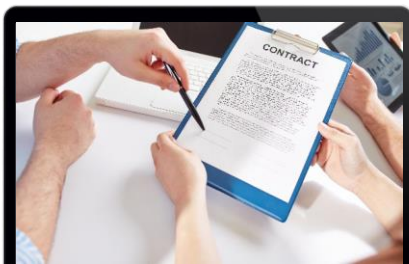
$$MR = \frac{dR}{dq} = R'(q) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{R(q + \Delta q) - R(q)}{\Delta q}$$

称为**边际收入**，表示在销量为 q 单位时，每增加（或减少）销售单位产品所增加（或减少）的收入。



任务实施

边际成本的描述



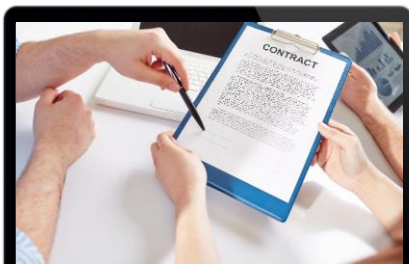
1. 某产品的总成本 C 是产量 q 的函数 $C = C(q)$, 总成本 C 随产量 q 变化的瞬时变化率, 在经济学中称为**边际成本**, 记为 MC , 则如何用数学语言描述边际成本 MC .



$$MC = \frac{dC}{dq} = C'(q) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta q} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{C(q + \Delta q) - C(q)}{\Delta q}$$



经济意义：表示在产量为 q 单位时，每增加（或减少）单位产品所需增加（或减少）的成本.



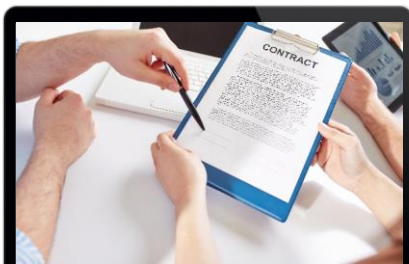
2. 某产品的总收益 R 是销量 q 的函数 $R = R(q)$. 总收益 R 随销量 q 变化的瞬时变化率, 在经济学中称为**边际收益**, 记为 MR , 则如何用数学语言描述边际收益 MR .



$$MR = \frac{dR}{dq} = R'(q) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{R(q + \Delta q) - R(q)}{\Delta q}$$



经济意义：表示在销量为 q 单位时，每增加（或减少）销售单位产品所增加（或减少）的收入.



3. 某产品的利润 L 是产销量 q 的函数 $L = L(q)$. 利润 L 随产销量 q 变化的瞬时变化率, 在经济学中称为**边际利润**, 记为 ML , 则如何用数学语言描述边际利润 ML .



$$ML = \frac{dL}{dq} = L'(q) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{L(q + \Delta q) - L(q)}{\Delta q}$$



经济意义：表示在产销量为 q 单位时，每增加（或减少）产销量单位产品所增加（或减少）的利润.

【例4.1.2】利用导数定义求函数的导数



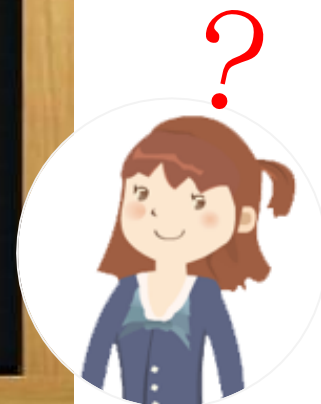
已知函数 $y = f(x) = c$ ，求 $f'(x)$

解

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

常数函数的导数公式：

$$f'(x) = (c)' = 0$$



【例4.1.1】利用导数定义求函数的导数



已知函数 $y = f(x) = x^3$ ，求 $f'(x)$ 和 $f'(-1)$ 。

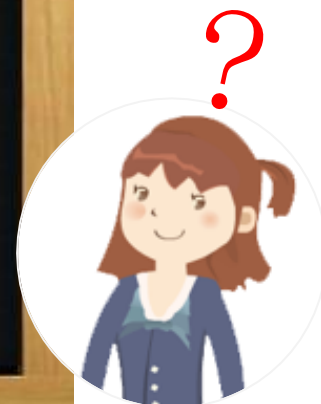
解

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 \\ &= 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$$

$$f'(-1) = f'(x)|_{x=-1} = 3x^2|_{x=-1} = 3$$

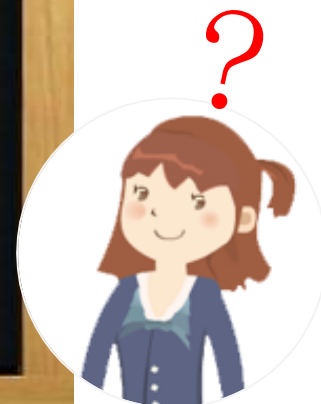


【例4.1.1】利用导数定义求函数的导数



可以证明幂函数的导数公式：

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \text{ 是实数}) .$$



?

思考：计算下列函数导数

$$(x^2)' = ? ,$$

$$(\sqrt{x})' = ? ,$$

$$\left(\sqrt[5]{u^3}\right)' = ? ,$$

$$\left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\right)' = ? ,$$

$$(x)' = ? ,$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = ? ,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = ? ,$$

$$\left(\frac{1}{t^3}\right)' = ? .$$



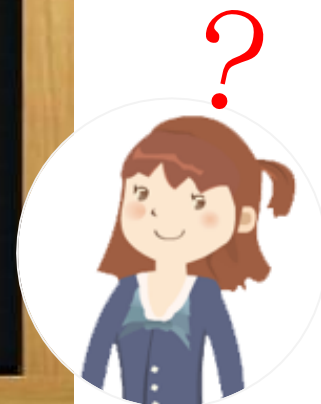
【例4.1.2】利用导数定义求函数的导数



已知函数 $y = \log_a x$ ，求 $f'(x)$

解

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} \\ &= \log_a e^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$



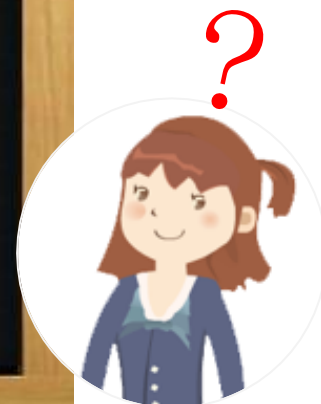
【例4.1.2】利用导数定义求函数的导数



对数函数的导数公式：

$$f'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$$



基本初等函数的导数公式

$$(1) (C)' = 0 \quad (C \text{ 为常量})$$

$$(2) (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \text{ 为实数})$$

$$(3) (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(5) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(4) (e^x)' = e^x$$

$$(6) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(7) (\sin x)' = \cos x$$

$$(8) (\cos x)' = -\sin x$$



?

思考：计算下列函数导数



$$(t^5)' = ?$$

$$(e^2)' = ?$$

$$(3^x)' = ?$$

$$(x^3)' = ?$$

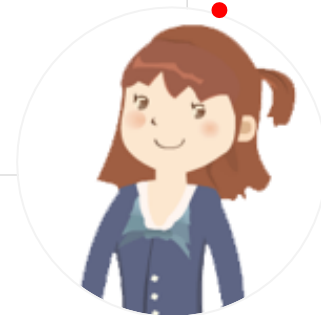
$$(\log_2 x)' = ?$$

$$(\lg x)' = ?$$

$$(\ln \pi)' = ?$$

$$(\sin u)' = ?$$

?



【例4.1.3】导数的几何意义



求曲线 $y = f(x) = x^2$ 在点 $(-1, 1)$ 处的切线与法线的方程.

解

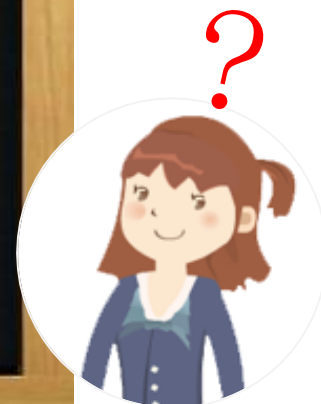
由 $f'(-1) = -2$, 即 $k = -2$

由直线的点斜式方程可知, 曲线 $y = x^2$ 在点 $(-1, 1)$ 处的切线的方程为

$$y - 1 = -2(x + 1),$$

即

$$2x + y + 1 = 0.$$



小结

函数 y 随自变量 x 变化的瞬时变化率, 在经济学中称为**边际**, 记为 $y = f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

边际成本, 记为 $MC = C'(q) = \frac{dC}{dq}$.

边际收益, 记为 $MR = R'(q) = \frac{dR}{dq}$.

边际利润, 记为 $ML = L'(q) = \frac{dL}{dq}$.



谢谢

